Оглавление

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений
9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите сумму $0,(0001)+0,(0002)+\ldots$ $17)$.

2. Докажите, что для любого целого числа N уравнение $10xy+17xz+27yz=N$ имеет решение в целых числах.

3. Известно, что многочлен $f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найдите многочлен вида $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$, имеющий корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$.

4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор и в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в ёмкости 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

5. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$).

6. В треугольнике со сторонами a, b, c и углами α, β, γ выполнено равенство $3\alpha+2\beta=180^0$. Докажите, что $c^2=a^2+bc$. Стороны a, b, c лежат соответственно напротив углов α, β, γ.

7. Докажите, что существует натуральное число N, делящееся нацело на 1009, сумма цифр которого равна 1009.

8. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная на рисунке справа после слова *пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.

Таблица А

1	0
0	2

Таблица В

0	2
3	0

Пример

1	8
0	2

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Воспользовавшись правилом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную, а также формулой для суммы первых 2017 членов арифметической прогрессии, найдем

$$0,(0001)+0,(0002)+\ldots \quad \frac{1}{9999}\quad \frac{2}{9999}\ \ldots\ \frac{2017}{9999}\quad \frac{1009\cdot 2017}{9999}=\frac{2035153}{9999}.$$

Ответ: $\frac{2035153}{9999}$.

Задача 2

Рассмотрим уравнение $Axy+Bxz+Cyz=N$. Пусть числа A и B взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа y и z, что $Ay+Bz=1$. Следовательно, $x=N-Cyz$. Поэтому наше уравнение имеет следующее решение в целых числах: $y=-5,\ z=3,\ x=N+27\cdot 3\cdot 5$. Утверждение доказано.

Задача 3

Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$. Тогда по условию задачи имеем:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1,-x_2,-x_3,-x_4\}$:

$$h(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x)=f(x)h(x)$:

$$G(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=$$
$$=(x^2-x_1{}^2)(x^2-x_2{}^2)(x^2-x_3{}^2)(x^2-x_4{}^2).$$

Заменой переменной $y=x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y)=(y-x_1{}^2)(y-x_2{}^2)(y-x_3{}^2)(y-x_4{}^2).$$

В нашем случае:

$$f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4,$$
$$h(x)=8-32x-12x^2+4x^3+x^4,$$
$$G(x)=f(x)h(x)=64-1216x^2+416x^4-40x^6+x^8,$$
$$g(y)=64-1216y+416y^2-40y^3+y^4.$$

Ответ: $g(x)=64-1216x+416x^2-40x^3+x^4$.

Задача 4

Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно a,b и c штук. По условию $0,1a+0,2b+0,9c=0,2017\cdot(a+b+c)\Leftrightarrow 1000\cdot(a+2b+9c)=2017\cdot(a+b+c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа a,b и c такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\ b\le 500,\ c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях. Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a = 7c - 17, b = 1017 - 8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c \le 517, 8c \ge 518, c \le 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответсвующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: Наименьшее количество переливаний равно **1000**. При этом могут быть использованы максимум **73** пробирки вида С.

Задача 5

Пусть $\sigma(N)$– сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab) = \sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

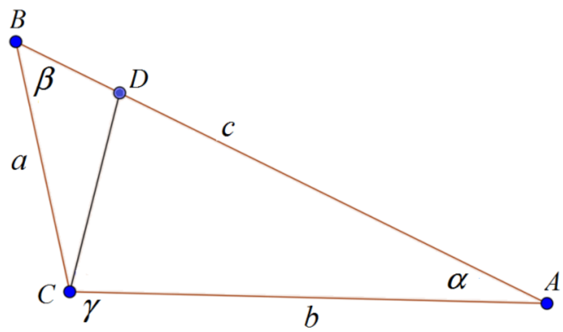
Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N = p_1^{k_1} \cdot \ldots$ Здесь p_i– попарно различны простые числа, и все $k_i \in N$. Тогда $\sigma(N) = \sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots$) и $\sigma\left(p^k\right) = 1 + p^2 + p^4 + \ldots$ Поскольку $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800) = \left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right) = 5035485.$$

Ответ: 5035485.

Задача 6

Из условия следует, что $c > b$. Найдем на отрезке AB точку Dтакую, что $AC = AD$. Тогда треугольник ACD равнобедренный и $\angle ACD = \angle ADC = 90° - \alpha/2$. Угол ADC – внешний угол треугольника CBD. Значит, $\angle BCD + \beta = \angle ADC = 90° - \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta$.



Значит $\angle BCD = \alpha$, и треугольники BCD и ABC подобны. Имеем $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ или $\frac{c-b}{a} = \frac{a}{c}$, откуда следует искомое соотношение.

Задача 7

Покажем, что *для любого натурального числа n существует натуральное число N, делящееся нацело на n, сумма цифр которого равна n.* Действительно, рассмотрим числа вида $10^k, k = 0,1,\ldots$ а именно: 1, 10, 100, 1000,…Среди этих чисел выберем n чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на n (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на n ровно n). В качестве искомого N возьмем сумму этих n чисел. Утверждение доказано.

Задача 8

Если таблица 2 получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2$, что для таблиц А и В не выполнено. Поэтому указанным способом получить таблицу В из таблицы А нельзя.

Таблица 1

a_1	b_1
c_1	d_1

Таблица 2

a_2	b_2
c_2	d_2

Ответ: Нельзя.

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите все корни уравнения $\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{\sin^3 x}=4\sqrt{2}$, лежащие на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

2. Докажите, что для любого целого числа N уравнение $10xy+17xz+27yz=N$ имеет решение в целых числах.

3. Известно, что многочлен $f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Найдите многочлен вида $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$, имеющий корни $\{x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2\}$.

4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В – 20% раствор и в С – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в ёмкости 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

5. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$).

6. Окружность касается сторон угла в точках A и B. На окружности выбрана точка M. Расстояния от M до сторон угла равны 24 и 6. Найти расстояние от M до прямой AB.

7. Докажите, что существует натуральное число N, делящееся нацело на 1009, сумма цифр которого равна 1009.

8. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная на рисунке справа после слова *пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.

Таблица А

1	0
0	2

Таблица В

0	2
3	0

Пример

1	8
0	2

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

$\sin^3 x-\cos^3 x=4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)=4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x.$

Замена: $\sin x-\cos x=t, \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$. Тогда $t\left(3-t^2\right)=\sqrt{2}\left(1-t^2\right)^3$. Замена: $t=z\sqrt{2}$.

Уравнение примет вид $z\left(3-2z^2\right)-\left(1-2z^2\right)^3=0$. Имеется корень $z=-1$, и левая часть может быть разложена на множители следующим образом:

$$(z+1)(8z^5-8z^4-4z^3+2z^2+4z-1)=0. \qquad (1)$$

Так как $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, то $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-1$. Следовательно, $z<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

При таких z многочлен пятой степени в левой части (1) принимает только отрицательные значения, так как $\left|8z^5\right|>\left|4z^3\right|$ и $\left|8z^4\right|>\left|2z^2\right|$. Поэтому $z=-1-$ единственный корень уравнения (1). Далее легко найти, что $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$, и $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 2

Рассмотрим уравнение $Axy+Bxz+Cyz=N$. Пусть числа A и B взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа y и z, что $Ay+Bz=1$. Следовательно, $x=N-Cyz$. Поэтому наше уравнение имеет следующее решение в целых числах: $y=-5,\ z=3,\ x=N+27\cdot3\cdot5$. Утверждение доказано.

Задача 3

Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$. Тогда по условию задачи имеем:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1,-x_2,-x_3,-x_4\}$:

$$h(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x)=f(x)h(x)$:

$$G(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=$$
$$=(x^2-x_1{}^2)(x^2-x_2{}^2)(x^2-x_3{}^2)(x^2-x_4{}^2).$$

Заменой переменной $y=x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y)=(y-x_1{}^2)(y-x_2{}^2)(y-x_3{}^2)(y-x_4{}^2).$$

В нашем случае:

$$f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4,$$
$$h(x)=8-32x-12x^2+4x^3+x^4,$$
$$G(x)=f(x)h(x)=64-1216x^2+416x^4-40x^6+x^8,$$
$$g(y)=64-1216y+416y^2-40y^3+y^4.$$

Ответ: $g(x)=64-1216x+416x^2-40x^3+x^4$.

Задача 4

Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a,b* и *c* штук. По условию $0,1a+0,2b+0,9c=0,2017\cdot\left(a+b+c\right)\Leftrightarrow 1000\cdot\left(a+2b+9c\right)=2017\cdot\left(a+b+c\right)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a,b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\ b\le 500,\ c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17,\ b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517,\ 8c\ge 518,\ c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение *c* равно 73. Ему соответствующие значения *a* и *b* могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: Наименьшее количество переливаний равно **1000**. При этом могут быть использованы максимум **73** пробирки вида C.

Задача 5

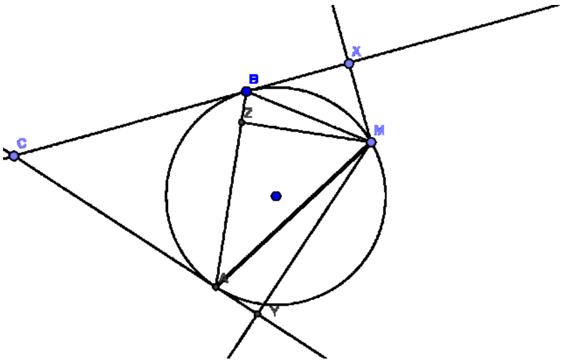
Пусть $\sigma(N)$– сумма квадратов натуральных делителей натурального числа *N*. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел *a* и *b* справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения *ab* есть произведение делителя *a* и делителя *b*. И наоборот: умножив делитель *a* на делитель *b*, поучим делитель произведения *ab*. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот). Рассмотрим разложение числа *N* на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots$

Здесь p_i– попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots$

и $\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots$ Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$$

Ответ: 5035485.



Задача 6

$\angle XBM=\angle ZAM=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}$, следовательно, треугольники BMX и ZAM подобны, поэтому $\frac{XM}{ZM}=\frac{BM}{AM}$. $\angle ABM=\angle YAM=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$, следовательно, треугольники AMYи BMZ подобны, поэтому $\frac{YM}{ZM}=\frac{AM}{BM}$. Отсюда

$$ZM^2 = XM \cdot YM = 24 \cdot 6 = 144, \qquad ZM = 12.$$

Ответ: 12

Задача 7

Покажем, что *для любого натурального числа n существует натуральное число N, делящееся нацело на n, сумма цифр которого равна n.* Действительно, рассмотрим числа вида $10^k, k = 0, 1, \ldots$ а именно: 1, 10, 100, 1000,…Среди этих чисел выберем n чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на n (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на n ровно n). В качестве искомого N возьмем сумму этих n чисел. Утверждение доказано.

Задача 8

Если таблица 2 получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2$, что для таблиц А и В не выполнено. Поэтому указанным способом получить таблицу В из таблицы А нельзя.

Таблица 1

a_1	b_1
c_1	d_1

Таблица 2

a_2	b_2
c_2	d_2

Ответ: Нельзя.

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Имеется 11 не обязательно различных натуральных чисел $a_1,\ldots$ Докажите, что существуют целые числа $c_1,\ldots \in \{-1;0;1\}$, не все равные нулю, такие, что число $c_1 \cdot a_1 + \ldots$ делится нацело на 2047.
2. Известно, что уравнение $x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = 0$ имеет (с учетом кратности) четыре положительных корня. Найдите *a* и *b*.
3. Докажите, что для любого натурального числа *n* существует натуральное число *N*, делящееся нацело на *n*, сумма цифр которого равна *n*.
4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – A, B и C. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида A содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках B – 20% раствор и в C – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида C может быть при этом взято?
5. Найдите сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).
6. В первый день Дима выбирает два различных числа из множества {0,1,2, … ,2332} и записывает их в тетрадь. На второй день он снова выбирает два различных числа из этого же множества и прибавляет каждое из выбранных чисел к каждому числу, уже имеющемуся в тетради. Потом он дописывает в тетрадь как сами выбранные числа, так и все получившиеся суммы. (Например, если в первый день выбрать 2 и 3, а во второй – 2 и 4, то в тетради будут записаны числа 2,3,2,4,4,5,6,7.) При этом, если какая-либо сумма превосходит 2332, он заменяет ее остатком от деления на 2333. На третий день он опять выбирает два различных числа, прибавляет их ко всем числам в тетради, дописывает в тетрадь эти два числа и все получившиеся суммы и т.д. Через какое минимальное количество дней (как бы Дима числа ни выбирал) каждое из чисел 0,1,2,…, 2332 будет гарантированно записано в тетради хотя бы один раз? Опишите все варианты, при которых Диме придётся ждать максимальное количество дней.
7. Про пятиугольник *ABCDE* известно, что
$$AB = BC = CD = DE,\ \angle B = 96^0,\ \angle C = \angle D = 108^0.$$
Найдите $\angle E$.
8. Имеются таблицы A и B, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей A можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы A прибавить третью строку, умноженную на 2, то получится таблица, изображенная на рисунке под словом *пример*.) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей A, получить таблицу B? Ответ обоснуйте.

Таблица А				
1	0	0	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

Таблица В				
0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0

Пример				
1	0	6	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Для каждого из всевозможных *различных* наборов коэффициентов $(d_1,\ldots$ $_i \in \{0;1\}$ рассмотрим сумму вида $S = d_1 \cdot a_1 + \ldots$ $_{11}$. Таких наборов (а значит и сумм) $2^{11} = 2048$ штук. Поэтому по крайней мере две суммы, S' и S'', дают одинаковые остатки от деления на 2047. Следовательно, их разность делится на 2047: $S' - S'' = \left(d_1' - d_1''\right) \cdot a_1 + \ldots$ $\vdots$ Искомые целые числа найдены: $c_i = d_i' - d_i''$. Утверждение доказано.

Задача 2

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни нашего уравнения (возможно, среди них есть одинаковые). Следовательно, многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = 16.$$

Известно, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического (неравенство Коши), но в нашем случае они равны:

$$\frac{x_1 + x_1 + x_1 + x_1}{4} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = 2.$$

Следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2,$ и

$$x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = (x - 2)^4.$$

Отсюда $a = 24, b = -32.$

Ответ: $a = 24, b = -32.$

Задача 3

Рассмотрим числа вида 10^k, $k = 0, 1, \ldots$ а именно: 1, 10, 100, 1000,… Среди этих чисел выберем n чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на n (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на n ровно n). В качестве искомого N возьмем сумму этих n чисел. Утверждение доказано.

Задача 4

Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a,b* и *c* штук. По условию $0,1a+0,2b+0,9c=0,2017\cdot\left(a+b+c\right)\Leftrightarrow 1000\cdot\left(a+2b+9c\right)=2017\cdot\left(a+b+c\right)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a,b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\, b\le 500,\, c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17,\, b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517,\, 8c\ge 518,\, c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение *c* равно 73. Ему соответствующие значения *a* и *b* могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: Наименьшее количество переливаний равно **1000**. При этом могут быть использованы максимум **73** пробирки вида C.

Задача 5

Пусть $\sigma(N)$– сумма квадратов натуральных делителей натурального числа *N*. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел *a* и *b* справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения *ab* есть произведение делителя *a* и делителя *b*. И наоборот: умножив делитель *a* на делитель *b*, поучим делитель произведения *ab*. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots$ Здесь p_i– попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots$) и $\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots$ Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$$

Ответ: 5035485.

Задача 6

Найдем наименьший номер страницы *N*, на которой будут записаны все числа множества $\{0,1,2,\ \ldots\ ,p-1\}$, где $p=2333$ – простое число. Покажем, что на новой странице различных чисел будет записано по крайней мере на одно больше, чем на предыдущей. Докажем это утверждение методом от противного.

Пусть *A* – множество различных чисел, полученных на данный момент:

$$A = \{a_1, \dots, a_m\} \neq \{0,1,\dots,p-1\}. \qquad (1)$$

Далее Дима выбрал два различных числа b_1, b_2 и прибавил их ко всем числам множества A, но количество сумм в результате не увеличилось. То есть, прибавив к числам из множества A сначала число b_1, а затем число b_2, он получил один и тот же набор сумм:

$$\{r_p(a_1+b_1), \dots, r_p(a_m+b_1)\} = \{r_p(a_1+b_2), \dots, r_p(a_m+b_2)\},$$

где $r_p(m)$ – остаток от деления числа m на число p. Следовательно, для любого $a \in A$ существует такой $c \in A$, что $r_p(a+b_2) = r_p(c+b_1)$. Другими словами, верно, что для любого $a \in A$ $r_p(a+(b_2-b_1)) = r_p(c) = c \in A$. Значит, для любого $a \in A$ и для всех $k = 0,1,2,\dots$ верно, что $r_p(a+k(b_2-b_1)) \in A$. Но для таких k числа вида $r_p(a+k(b_2-b_1))$ между собой различны. (Действительно, пусть числа $r_p(a+k_1(b_2-b_1))$ и $r_p(a+k_2(b_2-b_1))$ совпадают. Значит, разность $\left(a+k_1(b_2-b_1)\right)-\left(a+k_2(b_2-b_1)\right)$ делится на p, а следовательно на p делится произведение $(k_1-k_2)(b_2-b_1)$, что невозможно, так как каждый сомножитель по абсолютной величине не превосходит $p-1$, а число p – простое.) Получается, что множество A уже содержит p чисел, что противоречит (1).

Итак, доказано, что каждый раз количество различных чисел увеличивается по крайней мере на 1. Значит, самое позднее на странице с номером $p-1$ будут записаны все p чисел. Эта оценка достижима: если каждый раз выбирать числа 0 и 1, то все числа впервые будут записаны именно на странице с номером $p-1$ и не раньше. Следовательно, искомое N равно $p-1$.

Чтобы для получения всех чисел Дима заполнял в тетради максимальное (равное $p-1$) количество страниц, ему следует выбирать числа так, чтоб количество новых различных сумм увеличивалось каждый раз ровно на 1. Для этого необходимо и достаточно, чтобы полученные на каждом шаге различные числа образовывали арифметическую прогрессию, то есть $A = \{a_1, a_1+d, \dots, a_1+d(m-1)\}$, где d – произвольное заранее выбранное число от 1 до $p-1$, а новые числа b_1 и b_2 надо выбирать так, чтобы $d = |b_2-b_1|$.

Достаточность очевидна. Необходимость легко доказать по индукции. Действительно, пусть сперва Дима выбрал числа a_1 и a_2, $a_2 > a_1$. Положим $d = a_2 - a_1 > 0$. Затем он выбрал числа b_1 и b_2 и, в результате, получил суммы $a_1+b_1, a_2+b_1, a_1+b_2, a_2+b_2$. Из этих сумм две должны совпадать. Значит или $a_2+b_1 = a_1+b_2$, или $a_1+b_1 = a_2+b_2$. В обоих случаях $d = |b_2-b_1|$. Нетрудно заметить, что получившиеся в результате три новые суммы образуют арифметическую прогрессию. Пусть теперь на m-том шаге получены суммы $\{a_1, \dots$ образующие арифметическую прогрессию с разностью d. Прибавляя к ней новые числа b_1 и b_2, мы "сдвигаем" всю прогрессию вправо на b_1 и b_2 позиций, и если $d \neq |b_2-b_1|$, то количество новых различных сумм увеличится более чем на 1. Значит,

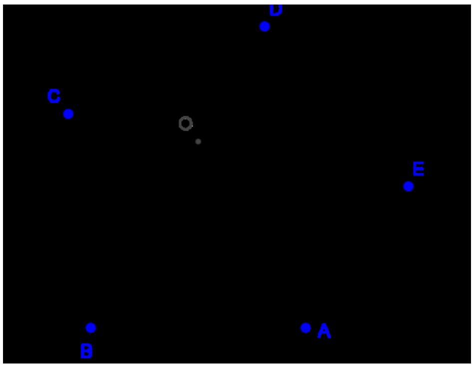
$d = |b_2 - b_1|$, и новые суммы опять образуют арифметическую прогрессию с той же разностью. Необходимость доказана.

Ответ: 1) $N = 2332$;

2) Дима выбирает первые два числа a_1 и a_2 произвольно. На каждом шаге новые числа b_1 и b_2 он выбирает так, что $|a_2 - a_1| = |b_2 - b_1| > 0$.

Задача 7

Проведем отрезки BD и CE. Пусть они пересекаются в точке O. Заметим, что треугольники BCD и CDE равнобедренные с углом 108° при вершине, а значит, углы при основании равны 36° (они отмечены на рисунке одной дугой). Тогда $\angle BCE = \angle BDE = 72°$.



Угол COD равен 108° (т.к. в треугольнике COD два угла по 36°). Поэтому $\angle COB = 180° – 108° = 72°$. Углы по 72° отмечены на рисунке двумя дугами. Получаем, что треугольники CBO и DEO равнобедренные. Значит,

$$AB = BO = BC = CD = DE = EO = x.$$

Заметим, что $\angle OBA = 96° – 36° = 60°$. Значит, треугольник OBA равнобедренный с углом 60° при вершине, т.е. равносторонний. Поэтому $AO = x$. Вычислим угол AOE

$$\angle AOE = \angle EOB – \angle AOB = 108° – 60° = 48°.$$

Треугольник AOE равнобедренный с углом 48° при вершине. Поэтому $\angle OEA = (180° – 48°)/2 = 66°$. Получаем, что угол E пятиугольника равен $\angle AED = \angle AEO + \angle OED = 66° + 36° = 102°$.

Ответ: 102^0.

Задача 8

Для таблицы 2 на 2 вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in R$ число $ad - bc$ будем называть *определителем* этой таблицы.

Пусть в составленной из целых чисел таблице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

у любой подтаблицы размера 2 на 2 (т.е. подтаблицы вида $\begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+k} \\ a_{i+k,j} & a_{i+k,j+k} \end{pmatrix}, i, j, i+k, j+k \in \{1, ..., 5\}$) определитель делится на целое число m. Проделаем с таблицей (1) одно из указанных в задаче действий. Тогда у получившейся в результате таблицы определитель любой ее подтаблицы размера 2 на 2 также будет делиться на m. Действительно, проведем доказательство данного факта для действия 1 из условия задачи (для столбцов доказательство аналогично). Пусть, без ограничения общности, к первой строке прибавляется вторая, умноженная на целое число b:

$$\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} & a_{13}+ba_{23} & a_{14}+ba_{24} & a_{15}+ba_{25} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

В получившейся таблице, все подтаблицы 2 на 2, не содержащие элементы первой строки таблицы (2), остались без изменения, и потому их определитель, естественно, на m по-прежнему делится. Поэтому проверим, что в таблице (2) определители подтаблиц 2 на 2, включающие элементы первой строки, делятся на m. Это нужно проверить в двух случаях: 1) подтаблица 2 на 2 составлена из элементов первой и второй строки таблицы (2) и 2) таблица 2 на 2 составлена из элементов первой и еще какой-то (отличной от второй) строки таблицы (2).

- **Случай 1**. Определитель таблицы $\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ равен $a_{22}\left(a_{11}+ba_{21}\right)-a_{21}\left(a_{12}+ba_{22}\right)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$, что совпадает с определителем соответствующей подтаблицы таблицы (1), а значит делится на m по условию.
- **Случай 2**. Рассмотрим подтаблицу, составленную из элементов первой и, например, третьей строки: $\begin{pmatrix} a_{11}+ba_{21} & a_{12}+ba_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. Ее определитель

  $$a_{32}\left(a_{11}+ba_{21}\right)-a_{31}\left(a_{12}+ba_{22}\right) \qquad (3)$$

  равен $a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12}+b(a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22})$. Числа $a_{32}a_{11}-a_{31}a_{12}$ и $a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22}$ представляют собой определи подтаблиц таблицы (1), а значит, делятся на m. Следовательно, на m делится и определитель (3).

Остается заметить, что определители всех подтаблиц 2 на 2 таблицы А делятся на 3, в то время как таблица В содержит подтаблицу (выделена серым), определитель которой на 3 не делится. Значит получить таблицу В из таблицы А указанными действиями нельзя.

0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС

1. Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 10 минут, а сноубордист – за 5 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 14:10. Определите время подъёма от подножия до вершины.

Ответ: 20.

2. Найдите наибольший корень уравнения $\left(x^2-10x+19\right)\left(x^2-6x+3\right)=-15$.

Ответ: 6

3. Найдите натуральное число n, ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна $2n$-1.

Ответ: 1024.

4. Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число N такое, что десятичная запись числа $\sqrt{N}$ имеет вид: $A{,}00a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где A – целая часть числа $\sqrt{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – цифры от 0 до 9.

Ответ: 2501.

5. Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, …

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате, получим последовательность:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, …

Найдите сумму первых 400 членов этой последовательности.

Ответ: 5814.

6. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите квадрат высоты данной трапеции.

Ответ: 3.

10 КЛАСС

1. Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 9 минут, а сноубордист – за 7 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 17:45. Определите время подъёма от подножия до вершины.

Ответ: 19.

2. Найдите наименьший натуральный корень уравнения $\left(x^2-10x+19\right)\left(x^2-6x+3\right)=-15$.

Ответ: 2 .

3. Найдите натуральное число n, ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна $2n$-1. **Ответ:** 512.

4. Найдите значение суммы

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{26}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{26}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{26}\right)+\ldots+\cos^2\left(\frac{11\pi}{26}\right)+\cos^2\left(\frac{12\pi}{26}\right).$$

Ответ: 6.

5. Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число N такое, что десятичная запись числа $\sqrt{N}$ имеет вид: $A{,}00a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где A – целая часть числа $\sqrt{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – цифры от 0 до 9. **Ответ**: 2501.

6. Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, …

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате получим последовательность:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, …

Найдите сумму первых 550 членов этой последовательности. **Ответ**: 8505.

11 КЛАСС

1. Найдите наименьший натуральный корень уравнения $\left(x^2-10x+19\right)\left(x^2-6x+3\right)=-15.$

Ответ: 2.

2. Найдите значение суммы

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{26}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{26}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{26}\right)+\ldots+\cos^2\left(\frac{11\pi}{26}\right)+\cos^2\left(\frac{12\pi}{26}\right).$$

Ответ: 6.

3. Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 45 сторон по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 100 сторон, а первая – по часовой стрелке через 83 стороны. Через сколько прыжков они одновременно попадут в одну вершину?

Ответ: 165.

4. Прямая $y(x)$ задается уравнением $y(x)=x+1$. Точки А и В имеют координаты А(1;0) и В(3;0). Найдите квадрат расстояния от точки В до точки прямой $y(x)$, из которой отрезок АВ виден под наибольшим углом. **Ответ:** 8.

5. Первый спортсмен начинает движение из пункта А в пункт В, держа в руке эстафетную палочку. Одновременно с ним из пункта В стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами А и В со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до А, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в В, оттуда снова в А и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает её другому спортсмену. Найти путь в метрах, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте В, если расстояние между пунктами А и В равно 121 метр. **Ответ:** 671.

6. Найдите максимум суммы $x+y$ пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству: $x^2 + y^2 = 100000$.

Ответ: 440.